Welche zentralen Ideen der Finanzmathematik sollen im Mathematikunterricht vermittelt werden?

CHRISTIAN DORNER (UNIV. GRAZ)

Um das Finanzwissen der Bevölkerung ist es schlecht bestellt, das besagen unterschiedliche Studien. Ein Blick auf heimische Statistiken bestätigt, dass gerade junge Erwachsene Probleme im Umgang mit Geld haben. Traditionelle Unterrichtsinhalte scheinen nicht mehr in ausreichendem Umfang die nötigen Fähigkeiten für ein Bestehen in der heutigen Finanzwelt zu liefern. Welche finanzmathematischen Inhalte sollten darum im Mathematikunterricht gelehrt werden? Im Beitrag wird kurz ein mögliches Konzept zur begründeten Verwendung bestimmter finanzmathematischer Inhalte für den Schulunterricht präsentiert. Im Anschluss werden dazu passende finanzmathematische Unterrichtsvorschläge für den Mathematikunterricht (auch für allgemeinbildende Schulen) vorgestellt.

1. Finanzbildung

Immer wieder tauchen in der Presse Artikel zum Thema Finanzbildung der österreichischen Gesellschaft auf, die ein düsteres Bild des Wissensstandes dieser zeichnen. Untenstehend ist eine Auswahl an aussagekräftigen Ausschnitten angeführt:

- „Österreichs Jugendliche tun sich schwer, mit Geld umzugehen. Fast jeder dritte Schüler betrachtet es heutzutage als normal, Schulden zu machen. Bei der Schuldnerberatung sind 14 Prozent der Klienten zum Zeitpunkt der Erstberatung 25 Jahre oder jünger." (orf.at, 29.11.2013)
- „Geld ist unser täglicher Begleiter. Mehrmals pro Tag haben wir mit den Münzen und Scheinen Kontakt oder benützen Karten mit Zahlungsfunktionen. Wirklich Ahnung vom Geld haben aber nur wenige, zeigt eine US-Studie" (derstandard.at, 26.9.2014)
- „WU-Studie: Blankes Konto und kaum Finanzwissen bei Jugendlichen"
(diepresse.com, 13.12.2017)
- „Und dennoch wird es als selbstverständlich erachtet, dass jeder die Fähigkeit erlernt hat, mit seinem Geld richtig hauszuhalten. Eine grobe Fehleinschätzung, wie eine Erhebung der Arbeiterkammer (AK) und des Vereins für Konsumenteninformation (VKI) zeigt." (derstandard.at, 7.1.2018)

Bei genauerer Durchsicht erfährt man, dass vor allem das Smartphone, das erste Auto bzw. Moped oder die erste Wohnung potentielle Schuldenfallen darstellen. Da bei vielen vor allem jungen Erwachsenen nicht genügend Geld vorhanden ist, um das teure Handy, Auto oder Eigenheim unmittelbar zu kaufen, muss in den meisten Fällen eine Art Kredit aufgenommen werden. Bei Mobiltelefonen ist das beispielsweise eine Vertragsbindung mit hohen Monatsbeträgen. Die Wirkungsweisen der Sollzinsen des Girokontos sind vielen fremd. Schon bei Jugendlichen ist das Ausborgen von Geld von Freunden oder Verwandten gang und gäbe, auch hier wird übersehen, dass es sich dabei um eine einfache Kreditform handelt. Es scheint, als hätten vor allem junge Österreicher/innen kaum Finanzbildung vorzuweisen.

Dabei stellt sich die Frage: Was versteht man unter Finanzbildung (engl. financial literacy)? Die Definition der OECD lautet:

> A combination of awareness, knowledge, skill, attitude and behaviour necessary to make sound financial decisions and ultimately achieve individual financial wellbeing. (OECD, 2017, S. 50)

FUHRMANN 2016 nimmt diese Definition genauer unter die Lupe und kritisiert vor allem, dass Bildung generell, insbesondere Finanzbildung, nicht ausschließlich auf verwertbare und in Lebenssituationen anwendbare Inhalte ausgerichtet ist. In Zukunft müssen vielleicht finanzielle Entscheidungen getroffen werden, die sich heute noch niemand vorstellen kann. Daher bedarf es an einer umfangreichen Finanzbildung, die nicht durch „necessary to make sound financial decisions" auf eine Entscheidungskompetenz

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 51, 2018, S. 17–32

eingeengt wird (vgl. FUHRMANN, 2016, S. 15-16).

Mittlerweile gibt es einige großangelegte Studien, die den Stand der Finanzbildung testen. Eine interessante Studie wurde von LUSARDI und MITCHELL (2014) durchgeführt, sie prüfen anhand von nur drei Fragen, ob der/die Probanden/in Finanzwissen vorweisen kann. Untenstehend sind die drei Fragen angeführt:

1. Angenommen, Sie haben 100 $ auf einem Sparbuch und der Zinssatz beträgt 2 Prozent pro Jahr. Wie groß ist der Geldbetrag auf dem Sparbuch nach 5 Jahren? Antwortmöglichkeiten: mehr als 102 $, exakt 102 $, weniger als 102 $, weiß nicht, keine Antwort.

2. Stellen Sie sich vor, der Zinssatz bei Ihrem Konto beträgt 1 Prozent pro Jahr und die Inflation beträgt 2 Prozent pro Jahr. Können Sie nach einem Jahr: Antwortmöglichkeiten: mehr, genauso viel, weniger mit dem Geld auf diesem Konto kaufen, weiß nicht, keine Antwort.

3. Denken Sie, ist die folgende Aussage richtig oder falsch? „Der Kauf einer einzigen Aktie liefert in der Regel eine sicherere Rendite als die Investition in einen Aktienfond.“ Antwortmöglichkeiten: wahr, falsch, weiß nicht, keine Antwort. (LUSARDI & MITCHELL, 2014, S. 10, übersetzt)

Die Ergebnisse der Studie sind frappierend. In den USA konnten 70% der Befragten nicht alle drei Fragen richtig beantworten. In Deutschland waren es 47% und in Russland gar 96%. Die österreichische Bevölkerung wurde nicht befragt, man geht aber von ähnlichen Ergebnissen wie in Deutschland aus.

Blicken wir nun nach Österreich. Die Österreichische Nationalbank erhebt regelmäßig den Stand der Finanzbildung der österreichischen Gesellschaft. Im Rahmen der Befragung im Jahr 2014 wurden ca. 2000 Österreicher/innen neben Fragen zur Einstellung und zu Verhaltensweisen elf Wissensfragen gestellt. Untenstehend findet man eine Auswahl von sechs Fragen dieser elf:

1. Fünf Brüder bekommen 1.000 EUR geschenkt. Wenn sie das Geld gleichmäßig teilen müssen, wie viel erhält dann jeder? (94%)

2. Wenn die Brüder dann ein Jahr warten müssen, bevor sie ihren Anteil erhalten und die Inflationsrate beträgt konstant 2%, können sie sich dann mit dem Geldbetrag a) mehr kaufen, als sie es heute können, b) genauso viel kaufen oder c) weniger kaufen, als sie es heute können? (65%)

4. Sie leihen einem Freund abends 25 EUR und er gibt Ihnen am nächsten Tag 25 EUR zurück. Wie viele Zinsen hat er auf diesen Kredit gezahlt? (85%)

7. Stellen Sie sich vor, Sie haben einen Kredit in Schweizer Franken aufgenommen und der Euro wertet gegenüber dem Schweizer Franken ab. Was meinen Sie, müssen Sie dann in Euro a) mehr, b) genau so viel, oder c) weniger zurückzahlen als vorher? (54%)

8. Wenn die Zinsen steigen, was passiert dann üblicherweise mit dem Kurs von Anleihen? a) Der Kurs steigt, b) der Kurs fällt, c) der Kurs bleibt gleich oder d) es gibt keinen Zusammenhang zwischen dem Kurs von Anleihen und dem Zinssatz. (21%)

9. Ist die folgende Aussage richtig oder falsch? Eine Geldanlage mit hoher Rendite ist wahrscheinlich sehr risikoreich. (85%) (SILGONER & WEBER, 2015, S. 42, Auswahl, Lösungsquote in Klammer hinzugefügt)

Bei einem Blick auf die Ergebnisse der Erhebung müssen die anfänglich aufgelisteten Pressemeldungen relativiert werden, siehe Abb. 1. Die zu sehende linksschiefe Verteilung ist ad hoc erfreulich. Bei einer genaueren Inspektion erkennt man, dass rund ein Fünftel der Befragten weniger als die Hälfte der Fragen richtig beantworten konnte. Erschwerend hinzu kommt, dass diese Personen im Rahmen einer Selbsteinschätzung ihre Fähigkeiten überschätzten. Diese unrealistische Selbstwahrnehmung kann diese Probanden dazu verleiten komplexe Finanzprodukte, wie Fremdwährungskredite oder Tilgungsträger auszuwählen, ohne die Risiken ausreichend zu verstehen (vgl. SILGONER & WEBER, 2015, S. 44-45).

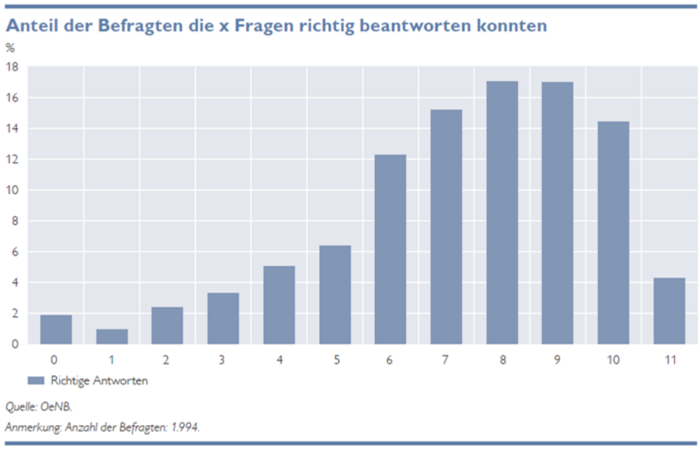


Abb. 1 Ergebnisse der Befragung (Quelle: SILGONER & WEBER, 2015, S. 41)

2. Finanzbildung und Mathematik(unterricht)

Bei der Betrachtung der obigen Fragen ist der mathematische Gehalt der Fragen unverkennbar. Für die korrekte Beantwortung der Fragen bedarf es an mathematischen Fähig- und Fertigkeiten. Genauer müssen Abschätzungen (Wie viel kostet mein Einkauf? Wie lange komme ich mit meinem Gehalt aus? etc.), Grundrechnungsarten, Prozentrechnung bzw. Bruchrechnung (Zinsrechnungen), Konzepte der Stochastik (Risiko) und Optimierung (Wie kann das Risiko minimiert werden? Wie kann der Ertrag maximiert werden?) gekonnt werden. Die OECD bestätigt diese Sichtweise gleich zu Beginn des Ergebnisberichts „PISA 2015 Results (Volume (IV) Student's financial literacy“. Sie schreiben:

> „..., having a solid foundation in mathematics and reading is crucial for navigating the financial environment, from computing percentages to reading a bank statement, ...“ (OECD, 2017, S. 3)

wenngleich auch im nächsten Satz mit „but it is not all that matters“ die obige Aussage beschwichtigt und auf weitere Kompetenzen verwiesen wird.

Über die Wichtigkeit der Finanzbildung herrscht große Einigkeit. Der Mathematikunterricht kann dazu ein Betrag leisten. In Österreichs Schulen muss der Mathematikunterricht auch einen Beitrag leisten. Der Grundsatzerlass zum Unterrichtsprinzip „Wirtschaft- und Verbraucher/innenbildung“, der für alle Schulstufen aller Schularten gilt, nimmt den Mathematikunterricht diesbezüglich explizit in die Pflicht. Schüler/innen sollen Mathematische Grundkompetenzen, wie folgt, einsetzen können:

> „Die Schüler/innen [...] können, ausgestattet mit ausreichenden mathematischen Grundkompetenzen, das persönliche Finanzmanagement gestalten, den eigenen wirtschaftlichen Verhältnissen angepasste Entscheidungen treffen und Daseinsvorsorge betreiben; ...“ (BMBWF, 2015, S. 3)

Konkrete Vorgaben für Unterrichtseinheiten findet man nicht. Von einem Blick in den Lehrplan erwartet man mehr. Im Lehrplan für die Sekundarstufe I findet man dort an zwei Stellen: Unter 1.4. direkte Proportionalitäten erkennen (zB Warenmenge-Geld, Zeit-Weg) und unter 3.4. lineare Wachstums- und Abnahmeprozesse mit verschiedenen Annahmen unter Zuhilfenahme von elektronischen Rechenhilfsmitteln untersuchen können (zB Zinssätze) (Lehrplan AHS).

Das österreichische Schulsystem ist in der Sekundarstufe II hochdifferenziert. Aus diesem Grund fällt auch eine Analyse des Lehrplans differenzierter aus, siehe Abb. 2. Die geforderten Stoffgebiete umfassen die Zinsrechnung, Rentenrechnung, Schuldentilgung, Investitionsrechnung und die Kosten- und Preistheorie. Die Kosten- und Preistheorie wird im Kontextkatalog der standardisierten Reifeprüfung (sRP) für die AHS unter dem Punkt „Finanzmathematischen Grundlagen“ geführt. Nach DORNER (2017) beschäftigt man sich dabei primär mit Gütern und nicht mit Kapital, aus diesem Grund sollte es der Wirtschaftsmathematik zugeordnet werden.[1] Aufgrund der genannten Auflistung wird es aber in die Analyse miteinbezogen.

AHS		HTL Cluster 1-5		HUM Cluster 6		HLFS Cluster 7		HAK Cluster 8		BAfEP - BASOP Cluster 9		
LP	sRP	LP	sDP	LP	sDP	LP	sDP	LP	sDP	LP	sDP	
	KK	x	BKA Teil A	x	BKA BKB Teil A Teil B	x	BKA BKB Teil A	x	BKA BKB Teil A Teil B		BKA Teil A	**Zinsrechnung**
				x	BKB Teil B	x	BKB Teil B	x	BKB Teil B			**Rentenrechnung**
				x	BKB Teil B	x	BKB	x	BKB Teil B			**Schuldentilgung**
								x	BKB Teil B			**Investitionsrechnung**
	KK		BKA Teil A Teil B (1, 3, 4, 5)	x	BKA BKB Teil A Teil B	x	BKA BKB Teil A Teil B	x	BKA BKB Teil A Teil B		BKA Teil A	**Kosten- und Preistheorie**

x ... wird im Lehrplan erwähnt
KK ... wird im Kontextkatalog erwähnt
BKA bzw. BKB ... wird im Begriffekatalog Teil A bzw. Teil B erwähnt
Teil A bzw. Teil B ... wird im Kompetenzkatalog Teil A bzw. Teil B erwähnt

Abb. 2 Ergebnisse der Befragung (Quelle: DORNER, 2017, S. 48)

In der Abbildung erkennt man, dass in den Schulen mit wirtschaftlichen Schwerpunkten (HAK, HUM und HLFS) deutlich mehr finanzmathematische Themen gefordert werden, als bei Schulen mit technischem, pädagogischen oder allgemeinbildenden Fokus (HTL, BAfEP/BASOP und AHS). Des Weiteren lässt sich durch die Vorgaben der sRP ein kleiner Schritt in Richtung mehr Finanzmathematik im Mathematikunterricht erkennen. Die Themenbereiche, die für den Mathematikunterricht vorgeschrieben sind, decken einen Teil des Spektrums ab, das bei den oben angegebenen Tests abgefragt wird bzw. das der Mathematikunterricht zur Finanzbildung beitragen kann. Der Lehrplan schreibt vor allem die Zinsrechnung und die Kosten- und Preistheorie vor. Der Mathematikunterricht kann mit Sicherheit noch mehr zur Finanzbildung beitragen.

3. Zentrale Ideen der Finanzmathematik

DORNER (2017) zeigt in seiner Dissertation auf, wie aus der Disziplin der Finanzmathematik sinnvolle Unterrichtseinheiten in diesem Bereich für den Mathematikunterricht konzipiert werden und zur Finanzmathematik beitragen können. Er wählt dazu einen Zugang über *zentrale Ideen* im Sinne *fundamentaler Ideen* für ein Teilgebiet der Mathematik nach SCHREIBER (1979). Eine solche Idee versteht DORNER (2017) im Sinne von SCHWILL (1993) als Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema, das eine lange Tradition aufweist und voraussichtlich längerfristig relevant bleibt (Zeitkriterium), breit in allen Teilgebieten der Disziplin vorkommt (Horizontalkriterium), einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags hat (Sinnkriterium) und auf unterschiedlichen intellektuellen Niveaus durchführbar ist (Vertikalkriterium). Ganz im Sinne von BRUNER (1960), der das Ernennen dieser Ideen den führenden Fachwissenschaftler/innen der jeweiligen Disziplin überlassen will, wurden sechs Finanzmathematiker/innen zu *zentralen Ideen* der Finanzmathematik befragt. Dieser Abschnitt orientiert sich an der Arbeit von DORNER (2017) und fasst die Ergebnisse zusammen.

Aus den Interviews konnten fünf *zentrale Ideen* klassifiziert werden: *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik*, *Handhabung von Risiko*, *No-Arbitrage-Prinzip*, *Replikation* und *Zeitwert des Geldes*. Im Folgenden werden diese Ideen in unterschiedlicher Länge[2] kurz erläutert und mit Zitaten aus den Interviews legitimiert.

[1] Die Finanzmathematik kann als Teilgebiet der Wirtschaftsmathematik aufgefasst werden. Die Kosten- und Preistheorie fällt in die Wirtschaftsmathematik aber nicht in die Teilmenge der Finanzmathematik.

[2] Die einer Idee gewidmete Textlänge entspricht weder der Wichtigkeit noch der Bedeutsamkeit für die Schule. Der/die Leser/in soll die Grundzüge dieser Ideen nachvollziehen können.

3.1. Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik

Bei dieser Idee geht es um die Verwendung stochastischer Methoden bei finanzmathematischen Anwendungen.

BACHELIER (1900) brachte mit seiner Dissertation „Theorie de la spéculation“ den „Zufall“ in die Finanzmathematik. Er war der Erste, der den Aktienpreis als stochastischen Prozess auffasste und in diesem Zusammenhang das mathematische Modell einer „Brown’schen Bewegung“ formulierte. Das passierte 5 Jahre bevor EINSTEIN und SMOLUCHOWSKI, die das besagte Modell im physikalischen Kontext verwendeten (vgl. SCHACHERMAYER, 2001, S. 7). Schon damals hatte BACHELIER unter anderem das Ziel, Optionen zu bepreisen.[3] Nach BACHELIER beschäftigten sich im Jahr 1973 BLACK, SCHOLES und MERTON mit der Bepreisung von Optionen. SCHOLES und MERTON wurden für ihre Arbeiten mit dem Alfred-Nobel-Gedächtnispreis ausgezeichnet.[4] Ein Blick auf aktuelle wissenschaftliche Arbeiten und Forschungsprojekte aus dem Bereich der Finanzmathematik bestätigt die längerfristige Relevanz und die breite Verwendung innerhalb der Disziplin der Finanzmathematik des Schemas.

Vorgänge am Finanzmarkt sind als probabilistisch und nicht als deterministisch anzusehen. Eine exakte Vorhersage des Aktienkurses ist unmöglich, man kann nicht in die Zukunft schauen. Auch wenn viele das nicht wahrhaben wollen. Wenn man Menschen befragt, ob Aktienkurse als zufällig betrachtet werden können, dann würden das vermutlich viele verneinen. Diese Anschauung erscheint vernünftig, da man davon ausgehen kann, dass Aktienkurse jederzeit das wirtschaftliche, politische und gesellschaftliche Geschehen in Aktiengesellschaften und deren Umfeld beinhalten. Auf dem ersten Blick wirkt das wie ein deterministischer Vorgang. Diesem Wirkungsgeflecht wohnt jedoch eine Komplexität inne, die niemand überblicken kann. Erschwerend hinzu kommt, dass niemand weiß, wann diese kursrelevanten Ereignisse passieren (z.B. Naturkatastrophen, Terroranschläge, ...). Aus diesem Grund ist es äußerst sinnvoll Aktienkurse als zufällig anzusehen (vgl. DAUME, 2009, S. 100-101). Eine/r der befragten Finanzmathematiker/innen unterstreicht die Zufälligkeit des Aktienkurses mit folgendem Zitat.

> „Ich finde eine coole Erkenntnis aus der Finanzmathematik ist schon, dass, also aus Finanzmathematik und von Fama, dass wenn die letzten fünf Tage der Aktienkurs gestiegen ist, dass das dann überhaupt keine Aussage darüber ermöglicht, ob der Kurs am sechsten Tag auch wieder steigen wird oder nicht steigen wird. Das ist etwas, was man nicht glaubt, oder?“
> (DORNER, 2017, S. 78)

Das Erkennen von probabilistischen Prozessen ist beim Erwerb von Finanzprodukten äußerst wichtig, dabei darf man jetzt nicht nur an den Aktienmarkt denken, sondern auch an die Aufnahme eines Kredites, siehe Abschnitt 5.1.

Ausgehenden von der trivialen Erkenntnis, man kann nicht in die Zukunft schauen, kein Aktienkurs ist exakt vorhersehbar, kann diese Idee auf unterschiedlichen intellektuellen Stufen betrieben werden. In einer ersten diskreten Zeitbetrachtung lässt sich der Aktienpreis in einem Binomialmodell entwickeln, siehe Abb. 3. Wir betrachten den Aktienkurs an fünf Zeitpunkten bzw. in vier Perioden. Zum Zeitpunkt 0 hat die Aktie den Preis S. In jeder Periode kann der Aktienkurs nur steigen oder fallen. Die Wahrscheinlichkeit für das Steigen beträgt p und für das Fallen $1-p$. Er steigt in allen Perioden mit dem konstanten Faktor u und fällt mit dem konstanten Faktor d. In diesem Fall gibt es zum Zeitpunkt 4 fünf mögliche Zustände, die der Aktienkurs in dieser Modellierung annehmen kann.

[3] Eine Option (in dem folgenden Beispiel europäische Call-Option) ist ein Finanzprodukt, bei dem man beim Kauf dieser das Recht aber nicht Pflicht erwirbt, eine bestimmte Menge eines zugrundeliegenden Finanztitels (meist Aktie) an einem bestimmten Tag zu einem bestimmten Preis zu kaufen.

[4] BLACK verstarb zwei Jahr zuvor und erhielt im Rahmen der Verleihung eine Würdigung.

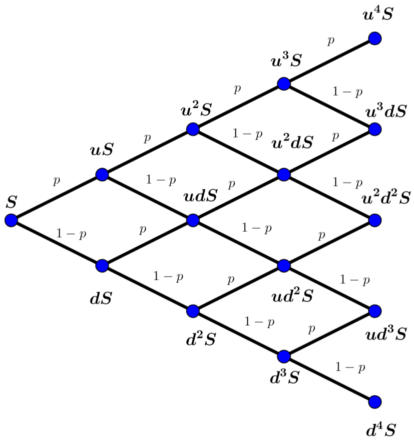


Abb. 3 Wahrscheinlichkeitsbaum für die Kursentwicklung einer Aktie im Binomialmodell für 4 Perioden (Quelle: DORNER, 2017, S. 81)

Anschließend kann man wieder einen Tick weitergehen und die Entwicklung des Aktienpreises in stetiger Zeit modellieren. Um die Entwicklung der Aktienpreise stetig zu modellieren, verwendet man sogenannte stochastische Differentialgleichungen. Man erhält daraus Kurven wie in Abb. 4 für den Kursverlauf von Aktien.

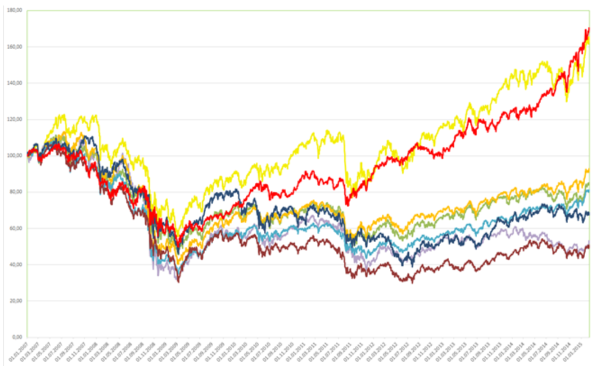


Abb. 4 Simulierter Kursverlauf mehrerer Aktien im stetigen Modell
(Quelle: http://www.financeblog.at/category/aktien/page/4/)

Die Komplexität lässt sich in der Forschung (grenzenlos?) steigern.

3.2. Handhabung von Risiko

Diese Idee deckt alle Denk-, Handlungs-,Beschreibungs- und Erklärungsschemata ab, die in der Finanzmathematik vorkommen, um Risiko zu messen, Risiko zu minimieren und risikobehaftete Prozesse zu erklären.

Risiko zu minimieren, liegt in der Natur des Menschen. Schon im zweiten Jtd. v. Chr. erließ man Bauern in Mesopotamien im Falle einer Missernte (z.B. durch Wetterkapriolen) die Zinszahlungen (im Form eines Anteils der Ernte). Diese Absicherung gegen Naturgewalten lässt sich als Derivat im ursprünglichsten Sinne verstehen. Mathematische Betrachtungen folgten erst später.

MARKOWITZ (1952) setzte einen Meilenstein mit dem Artikel „Portfolio Selection“. Er nimmt an, dass Anleger/innen bei einer Investition in Aktien nicht nur die zu erwartende Rendite berücksichtigen, sondern auch das zu erwartende Risiko in ihre Entscheidung miteinbeziehen. Als Risikokennzahl verwendete er die Standardabweichung. Ihm gelang damit der mathematische Nachweis der Risikominimierung durch Diversifikation, das bezeichnet das Verteilen seines Vermögens auf mehrere Anlagen. Eine alltägliche Formulierung des Prinzips lautet: „Leg nicht alle Eier in einen Korb.“ Diversifikation war allerdings schon lange bekannt, bereits SHAKESPEARE hatte ein intuitives Verständnis davon. Der Kaufmann Antonio aus der „Kaufmann von Venedig“ von SHAKESPEARE sagt:

„Glaubt mir, das nicht; ich dank es meinem Glück:
Mein Vorschuß ist nicht **einem** Schiff vertraut,
Noch **einem** Ort; noch hängt mein ganz Vermögen
Am Glücke **dieses** gegenwärtigen Jahrs;
Deswegen macht mein Handel mich nicht traurig.“
(Shakespeare zitiert nach Markowitz, 1999, S. 5, Hervorhebungen von CD)

Das Messen von Risiko hat heutzutage aufgrund von Finanzkrisen und den Basler Abkommen viel Gewicht bekommen. Viele finanzmathematische Modelle benötigen Risikowerte, z.B. für die Beschreibung der Schwankungen bei Aktienkursen. Diese gibt es in allen Komplexitätsstufen. Ein einfaches Risikomaß ist die Standardabweichung der Renditen[5] eines Aktienkurses, die auf einfachste Weise aus historischen Daten berechnet werden kann. Die Aussage der Kennzahl für das momentane Risiko ist jedoch gering. Die Bandbreite diesbezüglich reicht von Quantilen bei Risikoverteilungen wie den „Value-at-Risk“, bis hin zu „kohärenten Risikomaßen“ wie den „Tail-Value-at-Risk“ der durch einen bedingten Erwartungswert repräsentiert wird.

Im Alltag wesentlich ist das Erkennen von risikobehafteten Situationen am Finanzmarkt. Während Menschen bei alltäglichen Situationen, wie dem Besteigen einer hohen Leiter, eine gewisse Intuition gegenüber dem der Handlung innewohnenden Risiko aufweisen, fehlt diese bei Aktionen am Finanzmarkt. Das bestätigt eine Aussage eines/r Finanzmathematiker/in:

„... meine Tante möchte auf Nummer sicher gehen, und deswegen hat sie Gold gekauft. [...] und ja, auch ein Freund von mir hat Gold und Öl gekauft, um sich abzusichern und beide sind ganz stark gegen Spekulationen. Natürlich ist das genau Spekulation, wenn man Gold und Öl kauft.“ (DORNER, 2017, S. 102)

Eine Sensibilität der Bevölkerung gegenüber risikobehafteten Situationen am Finanzmarkt könnte zumindest einige private Dramen verhindern und vielleicht auch die eine oder andere Krise.

3.3. No-Arbitrage-Prinzip

In einer saloppen Formulierung bezeichnet Arbitrage das risikolose Gewinnen von Geld. Das *No-Arbitrage-Prinzip* steht für das Verbieten der Arbitrage in finanzmathematischen Modellen.

Dieses Prinzip harmonisiert mit den mathematischen Methoden des Beweisens. Das illustriert der folgende Satz.

Satz 1 *Wir nehmen an, es gilt die No-Arbitrage-Bedingung und das Kaufen und Verkaufen von Aktien bzw. Portfolios*[6] *verursacht keine Kosten. Des Weiteren erlauben wir Leerverkäufe.*[7]*.*
Wenn zwei Portfolios morgen den gleichen Wert aufweisen, dann haben diese Portfolios auch heute den gleichen Wert.

Beweis: Angenommen die beiden Portfolios haben heute nicht den gleichen Wert, dann ist eines der beiden mehr wert als das andere. In diesem Fall kann man heute das teurere Portfolio verkaufen, während man mit diesem Geld das billigere kauft. Es verbleibt eine Differenz. Am nächsten Tag verkauft man das ursprünglich billigere Portfolio und kauft mit diesem Geld das ursprünglich teurere zurück, beide sind nun gleich viel wert. Die gestern erhaltene Differenz verbleibt als risikoloser Gewinn, es wurde eine Arbitragemöglichkeit gefunden, Widerspruch.

□

Der echte Finanzmarkt bietet Arbitragemöglichkeiten. Diese existieren meist nur über sehr kurze Zeiträume

[5] Darunter versteht man die relativen Kursänderungen einer Aktie.
[6] Eine Sammlung von Wertpapieren eines/r Investor/in.
[7] Darunter versteht man das Ausborgen eines Wertpapiers, welches, ohne es wirklich zu besitzen, verkauft wird, um es erst zu einem späteren Zeitpunkt zu kaufen und es dem/der Käufer/in tatsächlich zu geben.

und benötigen ausgezeichnete Computerleistungen. Das berücksichtigen Finanzmathematiker/innen bereits, das *No-Arbitrage-Prinzip* wird sozusagen weiterentwickelt:

> „Trotzdem geht es nach wie vor darum, Arbitragefreiheit in diesem erweiterten Setting zu formulieren. Man hat jetzt robuste Arbitrage und so weiter [...] Genau, also ich glaube, dieses Prinzip der Arbitragefreiheit ist nach wie vor sehr wichtig [...] es gibt diese Entwicklung von stochastischer Portfoliotheorie, wo man sagt [...] auf langen Zeithorizonten kann es zu Arbitrage kommen, aber es gibt eben dann andere Begriffe. Also es gibt eben dann sehr viele Begriffe in einem gewissen Sinn Arbitragefreiheit. Dass man halt sagt, Arbitrage gibt es, aber Good Deals sollte man ausschließen. Dass man eben mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit sehr hohe Gewinne macht, solche Dinge. Diese Prinzipien kommen eben hauptsächlich vor und dann versucht man das eben mathematische zu formulieren.“ (DORNER, 2017, S. 117-118)

Das *No-Arbitrage-Prinzip* hat einen Bezug zum alltäglichen Sprechen und Denken den Menschen. Sprüche wie: „Nichts ist umsonst“, „Von Nichts kommt Nichts“ oder „Ohne Fleiß kein Preis“ spiegeln No-Arbitrage ganz gut wieder. Unter diesem Licht erscheinen Angebote aus dem Internet wie: „Banker verraten ihr geheimen Investitionsstrategien: Investieren Sie heute noch und werden Sie risikolos Millionär“ äußerst dubios.

3.4. Replikation

Unter *Replikation* versteht man das Nachbauen eines Finanztitels (z.B. europäische Call-Option oder Forward-Kontrakte wie im Bsp. 3.1) durch andere am Finanzmarkt erhältliche Finanzprodukte zum Zweck der Preisbestimmung. Diese Idee ist eng mit dem *No-Arbitrage-Prinzip* verbunden. Damit man sich das Zusammenspiel dieser beiden Ideen besser vorstellen kann, geben wir ein passendes Beispiel.

Beispiel 3.1 *Es ist möglich ein Termingeschäft (in diesem Fall Forward-Kontrakt) abzuschließen, bei dem man das Recht und die Pflicht erwirbt zu einem fixen Zeitpunkt (z.B. in einem Jahr) einen bestimmten Betrag in einer Währung (z.B. Euro) zu einem heute vereinbarten Kurs (Forward-Kurs) in eine andere Währung zu Wechseln (z.B. Dollar). Ein Abschluss eines solchen Vertrags benötigt einen anderen Marktteilnehmer, der bereit ist, diesen Vertrag auch in die andere Richtung abzuschließen. Das Verblüffende daran ist, dass das Verhältnis zwischen dem Kassakurs[8] und dem Forward-Kurs nur von dem Verhältnis der Zinsniveaus der beiden betrachteten Währungen abhängt.*

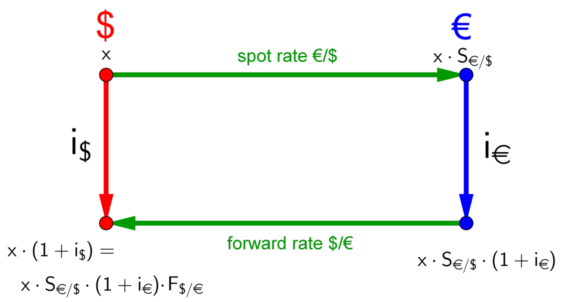


***Abb. 5** Berechnung eines Forwardkurses*

Für die Erklärung des Phänomens betrachten wir zwei Staaten, ein Staat mit der Währung Dollar, siehe links in Abb. 5 und ein Staat mit der Währung Euro, siehe rechts in Abb. 5. Das Zinsniveau (für ein Jahr) im ersten Staat beträgt $i_\$$ und im zweiten Staat $i_€$. Wenn wir mit einem Betrag x in Dollar beginnen, siehe Abb. 5 links oben, dann gibt es zwei Möglichkeiten. Einerseits können wir den Betrag x in Dollar belassen und auf ein Sparkonto für ein Jahr legen, welches mit einem Zinssatz von $i_\$$ verzinst wird. Das Sparkonto wirft Zinsen ab und unser Stand erreicht eine Höhe von $x \cdot (1 + i_\$)$, siehe Abbildung links unten. Andererseits können wir den oben erwähnten Vertrag mit einem Marktteilnehmer abschließen,

[8] Darunter versteht man den momentan gültigen Wechselkurs, engl. spot rate.

der uns ermächtigt, in einem Jahr zur Rate $F_{\$/€}$ Dollar in Euro zu wechseln. Abermals beginnen wir mit dem Betrag x Dollar und wechseln diesen in Euro. Bei einem Kassakurs von $S_{€/\$}$ hält man nach dem Wechsel $x \cdot S_{€/\$}$ Euro in Händen. Auf einem Sparbuch in dem betrachteten Eurostaat bringt der Betrag nach einem Jahr $x \cdot S_{€/\$} \cdot (1 + i_€)$ Euro, siehe rechts unten in Abb. 5. Nach einem Jahr lösen wir den Vertrag ein und erhalten $x \cdot S_{€/\$}(1 + i_€) \cdot F_{\$/€}$ Euro. Aus Gründen der No-Arbitrage müssen beide Beträge links unten gleich groß sein, daraus ergibt sich für das Verhältnis Kassakurs zu Forwardkurs (beide von Euro in Dollar, man bedenke $\frac{1}{F_{€/\$}} = F_{\$/€}$):

$$\frac{S_{€/\$}}{F_{€/\$}} = \frac{1 + i_\$}{1 + i_€}$$

Wenn diese Gleichheit nicht gilt, dann existiert eine Möglichkeit zur Arbitrage. Nehmen wir an, wir haben einen Jahreszinssatz von 3% in beiden Staaten. Der Kassakurs sei $1,04$ für Euro in Dollar und der Forward-Kurs sei $1,05$ für Euro in Dollar. Wir borgen uns 100 \$ von der Bank aus und wechseln diese in Euro um, wir erhalten ungefähr 96,15 €. In einem Jahr wachsen unsere Schulden auf 103 \$. Unser Guthaben in Euro wächst auf 99,04 €. Anschließendes Wechseln mit dem Forward-Kurs von 1,05 ergibt 103,99 \$. Es verbleibt ein Rest von 0,99 \$. Wir verbuchen einen risikolosen Gewinn ohne Nettoeinsatz von Kapital. (siehe: DORNER, *(2017), S. 121-123)*

Die Idee der *Replikation* geht auf BLACK, MERTON und SCHOLES zurück. Im Jahre 1973 veröffentlichten sie den Artikel „The pricing of options and corporate liabilities“ in dem sie *Replikation* als Prinzip zur Bepreisung von Optionen verwendeten.

> „. . . als dritten Strang würde ich schon die Black, Merton, Scholes, die Idee der Replikation von Derivaten, also dass man im Kontext einer Brown'schen Bewegung, unter gewissen Voraussetzungen, jedes beliebige Derivat perfekt replizieren kann. Das ist mathematisch schon eine verblüffende und anspruchsvolle Idee und es hat enorme Konsequenzen gehabt.“ (DORNER, 2017, S. 124-125)

Diese perfekte Replizierbarkeit eines jeden Derivats stellt in der Realität (leider) eine Illusion dar. Neuere finanzmathematische Marktmodelle betrachten unvollständige Märkte. In solchen Modellen sind nicht alle Derivate replizierbar.

> „Das sind schon mal die großen Eckpfeiler. Aber natürlich geht es hurtig weiter. Auf der einen Seite ist die Betonung der unvollständigen Märkte ebenso schön und verführerisch, wie die Idee der Replikationen ist, so sehr muss man darauf hinweisen (lacht), dass diese Idee eben zum Teil eine Illusion darstellt.“ (DORNER, 2017, S. 125)

Finanzmathematische Modelle können im Bezug auf das Replikationsprinzip drei Fälle aufweisen. Im besten Fall kann jedes Derivat eindeutig repliziert werden und man hat einen eindeutigen arbitragefreien Preis gefunden. Des Weiteren besteht die Möglichkeit, dass in dem modellierten Finanzmarkt ein bestimmtes Derivat nicht mehr eindeutig repliziert werden kann, aber man kann ein Intervall für einen arbitragefreien Preis angeben. Im schlechtesten Fall findet man für das betrachtete Derivat keinen arbitragefreien Preis. Solche Modelle sollten nicht für die Bepreisung herangezogen werden.

Der Bezug zum Alltag bzw. zur Sprache der Menschen ergibt sich dadurch, dass das Nachbauen bzw. Nachahmen eine typische menschliche Tätigkeit ist. Nach Lerntheorien aus der Psychologie lernen Menschen durch Imitation. Man denke an Babys, die die Gesten der Eltern nachmachen.

Die Idee der *Replikation* lässt sich auf unterschiedlichen intellektuellen Niveaus durchführen.

> „. . . da könnte man den Aspekt von Arbitrage und Replikation [...] mit Hilfe von Beispielen von statischer Replikation, also Buy-and-Hold-Portfolios, kann man hier meines Erachtens gut darstellen. Man kann Begriffe wie einen Forward-Kontrakt mit - Zinsen in zwei verschiedenen Währungen beispielsweise kann man gut illustrieren und hier - ohne - - fortgeschrittenen mathematischen Kalkül, also nur unter Benützung von elementaren Rechnungen, eben Begriffe wie Arbitrage oder eindeutige Bewertungen eines Kontrakts einführen. Naja

das kann man dann natürlich eben weiterführen, dann kann man eben zu einem Binomialmodell übergehen, wo eben dynamische Replikationsstrategien sind und dann kann man wieder einen Tick weitergehen, dann kann man es in stetiger Zeit machen. Jetzt sind wir irgendwo beim Bachelorniveau. Dann kann man in der Forschung beliebig weitergehen.“ (DORNER, 2017, S. 127)

Das Beispiel 3.1 illustrierte bereits das Prinzip der statischen *Replikation*. In mehrstufigen Binomialmodellen, siehe Kapitel 3.1, kann man Derivate betrachten, die schon eine dynamische *Replikation* benötigen. Bei Betrachtungen in stetiger Zeit kommt man üblicherweise mit dem Black-Scholes-Modell in Kontakt. Aufgrund der Bedeutsamkeit dieses Modells möchten wir an dieser Stelle die Preisformel für eine europäische Call-Option anführen. Die vorkommenden Symbole werden untenstehend erklärt.

$$c(t,S(t)) = S(t)\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \quad (1)$$

Die Variable t repräsentiert die Zeit und $S(t)$ gibt den Aktienpreis zum Zeitpunkt t an. Die Volatilität[9] wird mit σ und der risikolose Zinssatz pro Zeiteinheit wird mit r bezeichnet. Bei einer europäischen Call-Option erwirbt man das Recht aber nicht die Pflicht, die Aktie S am Ausübungszeitpunkt T zum Ausübungspreis K zu kaufen. Der Term $T-t$ steht also für die verbleibende Laufzeit der betrachteten Option. Φ stellt die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung dar. Mit Hilfe dieser Formel lässt sich zu jeder Zeit t der Optionspreis c bestimmen, vorausgesetzt man kennt alle benötigten Werte. Die dynamische *Replikation* liefert unter Verwendung stochastischer Differentialgleichungen eine Funktion c des Optionspreises in Abhängigkeit von t und $S(t)$. Mit Hilfe dieser Formel wurden(/werden) Optionspreise berechnet. Noch immer verwenden einige Banken/Institutionen exakt diese Formel zur Bepreisung von Call-Optionen, obwohl die Nachteile des Modells schon lange bekannt sind. Es wird oft erwähnt, dass die darin enthaltene Normalverteilung extreme Ereignisse unterschätzt, denn solche Ereignisse kommen häufiger vor als in diesem Modell angenommen. Im Allgemeinen ist die Annahme der Vollständigkeit, jedes Derivat ist replizierbar, viel öfter die Annahme, warum diese Formel zu unpassenden Werten führt.

3.5. Zeitwert des Geldes

Das Prinzip des Auf- und Abzinsens kommt überall vor: vom einfachen Sparbuch bis hin zu komplexen Zinssatzmodellen.

> „Zinsen sind ja allgegenwärtig, vom normalen Konto bis zum Sparbuch, das jedes Kind schon hat.“ (DORNER, 2017, S. 142)

Die Idee betrifft den/die Durchschnittsbürger/in ganz stark, das reicht eben vom Sparbuch über den Kredit bis hin zu Finanzierungen.

Bereits 3000 v. Chr. in Mesopotamien gab es ein Kreditwesen basierend auf Getreide und Metall. Das älteste Gesetzbuch der Welt der Kodex „Hammurabi“ führt Höchstgrenzen für Zinssätze an. Für Silber stand diese bei 20% per anno. Nach HUDSON (2000) stehen historische Zinssätze in enger Verbindung mit dem damals vorherrschenden Zahlensystem. So verwendeten die Sumerer bereits den Bruch $\frac{1}{60}$. Bei der Schuld von einem Schekel (eine babylonische Größeneinheit) fiel ein monatlicher Zinssatz von $\frac{1}{60} = 1\frac{2}{3}\%$ an. Hochgerechnet auf ein Jahr ergibt das $12 \cdot \frac{1}{60} = 20\%$. Ähnliche Aussagen lassen sich zu den Griechen und Römern tätigen.

Finanzmathematiker/innen beschäftigen sich auf der einen Seite explizit mit Zinssatzmodellen, also Modelle wo es um die Modellierung von Zinssätzen geht. Auf der anderen Seite berücksichtigen sie den Zinssatz in Modellen, wo es primär um etwas Anderes geht, z.B. die Bepreisung von Optionen, siehe Formel (1). Wenn gleich auch in der akademischen Welt bei der letzteren Anwendung der Zinssatz bei den Ausführungen vernachlässigt wird, umso mehr spielt er in der Praxis eine wichtige Rolle.

[9] Maßzahl für das Schwanken des Aktienkurses.

„Das ist eben das Absurde in der akademischen Finanzmathematik werden Zinsen immer auf 0 gesetzt, in jedem Paper, weil es einfach nur mühsame Schreibarbeit ist, außer es geht um die Modellierung von Short-Track-Modells, also wenn es nicht explizit um die Zinsmodellierung selber geht, werden die Zinsen immer 0 gesetzt, weil es mühsam ist. Das war eigentlich der größte Kulturschock beim Austritt aus der Uni, dass es da eigentlich nur um Zinsen geht, wirklich die ganze Zeit nur um Zinsen." (DORNER, 2017, S. 138)

Auf einer sehr einfachen Stufe ist es bei dieser Idee die Zinsrechnung, die schon in der Unterstufe gelehrt wird: Das Anfangskapital K_0 steht für jenen Betrag, der am Beginn (des Jahres) eingezahlt wird. Der Zinssatz $p\%$ wird auf diesem Niveau als Jahreszinssatz angegeben. Mit Z bezeichnet man die Zinsen, das ist jener Betrag, den der/die Sparer/in als Vergütung für den eingezahlten Geldbetrag erhält. Die Jahreszinsen hängen mit dem Zinssatz zusammen, sie belaufen sich auf $p\%$ des Anfangskapitals. Die Zinsen werden nach einem Jahr am Konto des/der Sparer/in gutgeschrieben. Das Kapital K_1 nach einem Jahr beträgt:

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Banken sind in einer gewissen Weise großzügig, da sie die angefallenen Zinsen aus dem ersten Jahr im nächsten Jahr mitverzinsen (sofern das Geld nicht abgehoben wird). Nach dem obigen Prinzip der Verzinsung ergibt sich auf intuitive Weise die bekannte Zinseszinsformel für n Jahre:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Die Ungewissheit für den/die Sparer/in, die für eine/n Kreditnehmer/in größere Auswirkungen hat, liegt im variablen Zinssatz (sofern das Geld nicht an einen Fixzinssatz gebunden wird). So gibt es finanzmathematische Modelle, die zur Beschreibung und Entwicklung des Zinssatzes dienen. Für Modellierungen in stetiger Zeit verwendet man stochastische Differentialgleichungen. In der Forschung werden die Modelle dann immer komplexer.

4. Auswahlkriterien schulrelevanter Themen der Finanzmathematik

Die vorgestellten *zentralen Ideen* können im Mathematikunterricht nicht vollständig durchdrungen werden. Das Konzept intendiert das nicht, jedoch um finanzmathematisch Inhalte im Unterricht geeignet zu präsentieren, bedarf es dann weiterer Kriterien. BLUM (1978), JABLONKA (1999) und WINTER (2016) haben Kriterien für guten (anwendungsorientierten) Mathematikunterricht formuliert. Ausgehend davon lassen folgende vier Kriterien festmachen:

- Formal Aspekte: Das Thema muss vom Lehrplan abgedeckt werden. Dessen Behandlung muss in einem angemessenen Zeitrahmen möglich sein. Finanzmathematische Inhalte die mehrere Wochen Erarbeitungszeit benötigen, können im Regelunterricht nicht durchgenommen werden.
- Eignung: Die finanzmathematische Anwendung muss entweder für die momentane Lebenswelt des/der Schüler/in oder für seine/ihre mutmaßliche spätere Lebenswelt von Nutzen sein.
- Authentizität: Für eine Durchführung in der Schule müssen Vereinfachung getroffen werden, dabei soll der mathematische Inhalt in einer intellektuellen ehrlichen Form darstellbar sein.
- Mathematische Aspekte: Die vorkommende Mathematik darf weder zu komplex noch zu trivial sein.

5. Exemplarische Vorstellung von Unterrichtssequenzen

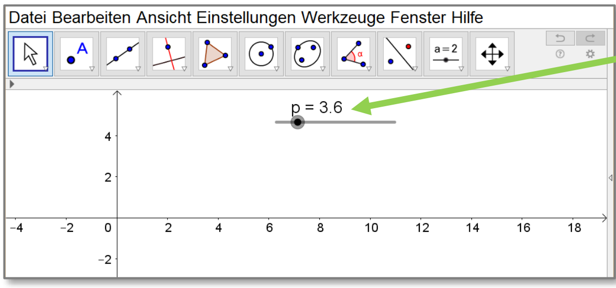
Auf Basis der fünf *zentralen Ideen* und unter Berücksichtigung der vier Kriterien können Unterrichtssequenzen zu finanzmathematischen Themen fundiert entwickelt werden. Im Folgenden werden zwei Unterrichtsideen für den Mathematikunterricht vorgestellt, die einen Beitrag zur Finanzbildung leisten.

5.1. Kredite und Risiko

Tilgungsdauer eines Kredits 1

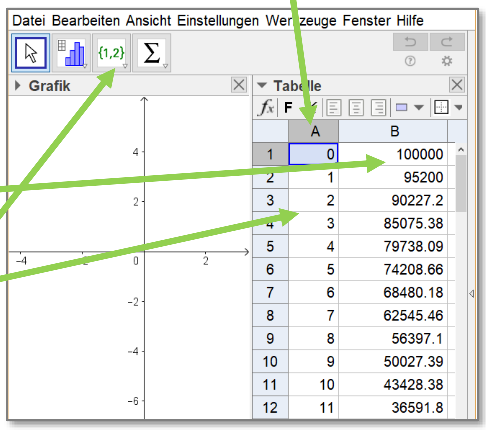
KREDITANGEBOT
Ausgangsschuld: 100 000 €
jährliche Rate: 8 400 €
Zinssatz (jährlich): p%

Versetze dich in die Lage, du benötigst 100 000 € und dir bleibt nichts Anderes übrig, als einen Kredit aufzunehmen. Bei der Bank erhältst du das links stehende Angebot.
Für die Berechnung des jährlichen Schuldenstandes werden zuerst die Zinsen dazugerechnet und dann wird die Rate abgezogen. Das heißt, der Schuldenstand nach dem ersten Jahr S_1 nach dem ersten Jahr ist: $S_1 = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 8\,400$. Der Schuldenstand im zweiten Jahr beträgt dann $S_2 = S_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 8\,400$ usw. Visualisiere die Rückzahlung in einem GeoGebra-Arbeitsblatt, siehe Screenshots und beantworte anschließend die untenstehenden Fragen!



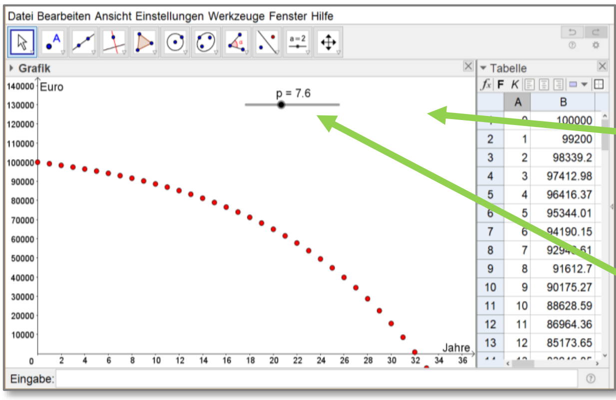
1) Werkzeugleiste/Grafik: Erstelle einen Schieberegler namens p (setze min auf 0, max auf 20 und Schrittweite auf 0.1)! Dessen Wert gibt den Jahreszinssatz in Prozent an.

2) Tabelle: Öffne die Tabellenansicht! Trage in die erste Spalte die Zahlen von 0 bis 40 für die jeweilige Jahreszahl ein!



3) Tabelle: Schreibe in die Zelle B1 die Ausgangsschuld 100000 Euro! Berechne den Schuldenstand in jedem Jahr, schreibe dazu in die Zelle B2 den Term B1*(1+p/100)-8400! Verfahre dazu analog für die restlichen Zeilen, kopiere dazu die Zelle B2 („herunterziehen“)!

4) Tabelle/Werkzeugleiste: Markiere den Bereich von A1 bis B41 und verwende anschließend das Werkzeug „Liste von Punkten“ {•••} !



5) Eigenschaften: Stelle die Dimensionen des Grafikfensters in den Eigenschaften so ein, dass der interessante Bereich sichtbar ist, wähle dazu xMin: -2, xMax: 40, yMin: -2 500, yMax: 150 000!

6) Grafik: Verändere den Wert des Schiebereglers so, dass die unten stehenden Fragen beantwortet werden können!

1. Wie lange dauert die Tilgung (gesamte Rückzahlung) des Kredits, wenn der jährliche Zinssatz p% a) 0,1%, b) 2,6%, c) 8,4% bzw. d) 12,6% beträgt?
2. Beschreibe die Situation bei c) und d) im Kontext!
3. Wie hoch muss der Zinssatz sein, damit der Kredit in 30 Jahren getilgt ist?
4. Wie verändert sich die Tilgungsdauer des Kredits, wenn sich der Zinssatz ändert? Antworte zuerst intuitiv und überprüfe dann deine Vermutung in deinem GeoGebra-Arbeitsblatt!
5. Welche Annahmen sind nicht realistisch?

Abb. 6 Arbeitsblatt 1 zum Unterrichtsvorschlag „Kredite und Risiko“

Der Unterrichtsvorschlag trägt zur Vermittlung der Ideen *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik*, *Handhabung von Risiko* und *Zeitwert des Geldes* bei. Die Unterrichtssequenz „Kredite und Risiko“ beruht auf der untenstehenden Aussage eines/r befragten Finanzmathematiker/in, der/die sich auf ein Bankberatungsgespräch bei einer Kreditaufnahme bezieht.

> „. . . , dass das einfach deterministisch ist, obwohl es nicht deterministisch sein wird, [. . .] wenn man halt irgendwelche Skizzen bekommt [. . .] und man glaubt, das sind alle drei Szenarien, die es gibt [. . .] oder es wird ein Szenario angegeben, das vielleicht noch sehr gut ist, aber im Endeffekt wird es dann ziemlich falsch laufen, also das ist, glaube ich, ein Punkt, den man auch bei Fremdwährungskrediten ganz stark gesehen hat, da ist Österreich ganz stark betroffen. ...“ (DORNER, 2017, S. 78)

Kredite und Tilgungspläne sind im Lehrplan verankert und kommen im Unterricht vor. Die Aufgaben vermitteln jedoch meist einen statischen Eindruck. Dynamiken und Risiken werden kaum thematisiert. Anhand des untenstehenden Arbeitsblattes sollen in einer vorerst deterministischen Sichtweise einfache Dynamiken eines Kredites besprochen werden, siehe Aufgabenstellung in Abb. 6. Diese sind auch ohne GeoGebra lösbar. In dieser Unterrichtssequenz steht (am Beginn) die Visualisierung von Dynamiken und Risiken im Vordergrund. Eine explizite Betrachtung der Tilgungsgleichung erweist sich am Ende der Sequenz als sinnvoll.
In einem darauf folgenden Arbeitsblatt, das wir hier aus Platzgründen nur kurz erläutern, soll der Wechsel von einer deterministischen hin zu einer probabilistischen Sichtweise stattfinden. Ein variabler Zinssatz wird hier mit Hilfe von Zufallszahlen, die in einer ersten Näherung gleichverteilt im Intervall $(0, 12]$ sind, modelliert. Der zufällige Verlauf wird im Grafikfenster 2 dargestellt, siehe Abb. 7. Die jährlichen Schuldenstände ergeben dann keine so schöne „Kurve“ wie zuvor bei Arbeitsblatt 1.

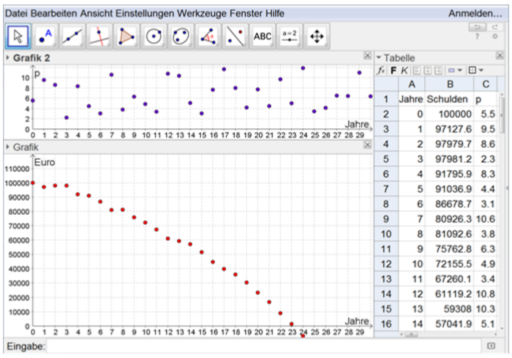


Abb. 7 Verlauf des Schuldenstandes bei zufälligem Zinssatz

Die Lernenden sollen durch häufiges Wiederholen der Simulation, durch einfaches Drücken der F9-Taste in GeoGebra werden neue Zufallszahlen berechnet, günstige und ungünstige Szenarien aus der Sicht eines/r Kreditnehmer/in erkennen. Anschließend sollen sie die Modellierung des Zinssatzes realistischer gestalten.

5.2. Diversifikation

Der folgende Unterrichtsvorschlag basiert auf den Ideen *Handhabung von Risiko* und *Verwenden von Stochastik im Kontext Finanzmathematik*. Zwei Aussagen der interviewten Personen unterstreichen die Wichtigkeit des Prinzips:

> „Die nächste fundamentale Idee scheint mir von Markowitz, die Portfoliotheorie. Also die Idee, dass - man mit Begriffen hantiert, die auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Konzepten basieren, eben Varianz - und Erwartungswert, und dass man hier eine Optimierung durchführt, das erscheint mir außerordentlich wichtig und konzeptionell neu.“ (DORNER, 2017, S. 89)

> „...ein anderer Bezug zum Alltag, den man aus der Portfoliooptimierungstheorie mitnehmen muss, ist es, dass es für Privatpersonen ein großer Unfug ist, sich einzelne Aktien zu kaufen.

Das ist schon ein bisschen subtiler und hört man weniger und das ist trotzdem eine wichtige Lehre, finde ich.“ (Dorner, 2017, S. 103)

Das folgende Spiel stammt ursprünglich aus Dorner (2017) und wurde in Dorner (2018b) weitergeführt. Der Autor zeigt dabei auf, wie Schüler/innen anhand eines Würfelspiels an die Grundprinzipien der Portfoliotheorie herangeführt werden. Die Regeln für das Spiel lesen sich folgendermaßen:

> Es gibt einen fairen roten und einen fairen blauen Würfel. Man gibt sich selbst einen Einsatz für dieses Spiel vor und bestimmt einen Teil des Einsatzes, der auf den roten Würfel gesetzt wird. Der restliche Betrag des Einsatzes wird auf den blauen Würfel gesetzt. Es werden beide Würfel geworfen. Wenn der rote Würfel die Augenzahl 1, 2 oder 3 anzeigt, dann bekommt man das Dreifache des auf den roten Würfel gesetzten Betrags, im anderen Fall, also wenn der rote Würfel die Augenzahl 4, 5 oder 6 anzeigt, dann verliert man den gesetzten Betrag. Für den blauen Würfel gilt genau dasselbe. Wenn der blaue Würfel die Augenzahl 1, 2, oder 3 anzeigt, dann bekommt man das Dreifache des auf den blauen Würfel gesetzten Betrags, im anderen Fall verliert man diesen Betrag. Wie soll der Einsatz auf die Würfel aufgeteilt werden? (Dorner, 2018b, S. 25)

An dem Spiel Teilnehmende interessieren sich wahrscheinlich für jene Aufteilung, bei der man den größten Gewinn zu erwarten hat bzw. bei der man das Risiko für einen Verlust minimieren kann. Aus Gründen der Einfachheit und o.B.d.A. setzen wir bei der folgenden Betrachtung genau einen 1 Euro. Von diesem wetten wir $a \cdot 1$ Euro auf den roten und $(1-a) \cdot 1$ Euro auf den blauen Würfel, es gilt $0 \leq a \leq 1$. Mit X bezeichnen wir jene Zufallsvariable, die den Gewinn beschreibt.

Das oben beschriebene Würfelspiel kann als zweistufiges Zufallsexperiment aufgefasst werden. Bevor wir Berechnungen durchführen, betrachten wir das untenstehende Baumdiagramm.

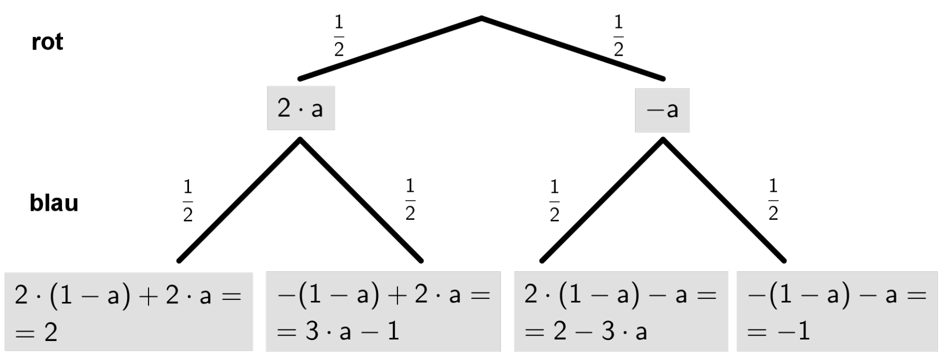


Abb. 8 Baumdiagramm für das Glücksspiel

Die Berechnung des Gewinnerwartungswertes gestaltet sich, wie unten angeführt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot (3a-1) + \frac{1}{4} \cdot (2-3a) + \frac{1}{4} \cdot (-1) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot [(3a-1) + (2-3a)] = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Der Gewinnerwartungswert hängt nicht von a ab und beträgt konstant $\frac{1}{2}$ Euro. Wie kann das Risiko geeignet gemessen werden? Ein gangbarer Weg besteht in der Betrachtung von Schwankungen um den zu erwartenden Gewinn. Bei großen Schwankungen kann es sein, dass das tatsächliche Ergebnis relativ weit vom Gewinnerwartungswert entfernt ist. Das resultiert im ungünstigen Fall in einem (großen) Verlust. Aus diesen Überlegungen erscheint es plausibel, die Standardabweichung zu betrachten. Aufgrund des vorigen Ergebnisses könnte man vermuten, dass die Standardabweichung ebenfalls unabhängig von a

ist. Es reicht, die Varianz zu betrachten, da die Wurzelfunktion streng monoton ist.

$$\begin{aligned}V(X) =&\frac{1}{4}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(3a-1-\frac{1}{2}\right)^2+\\&+\frac{1}{4}\cdot\left(2-3a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2=\\=&\frac{9}{4}\cdot(2a^2-2a+1)=\frac{9}{2}\cdot\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{8}\end{aligned}$$

Wenn $a=\frac{1}{2}$ ist, dann ist die Varianz bzw. auch die Standardabweichung minimal. Das bedeutet, bei einer gleichmäßigen Aufteilung des Spieleinsatzes, Diversifikation, ist das Risiko minimal.

Die Berechnungen hätten auch anders geführt werden können. Betrachten wir nun die zwei Würfel getrennt. Die Zufallsvariable X_1 steht für den Gewinnauszahlungsfaktor des ersten roten Würfels. Wenn X_1 den Wert 2 annimmt, dann versteht man darunter, man gewinnt das Doppelte des Einsatzes, bei dem Wert 3, ist es eine Verdreifachung usw. Analog bezeichnet X_2 den Gewinnauszahlungsfaktor des zweiten blauen Würfels. Wenn wir wieder insgesamt 1 Euro setzen und davon $a\cdot 1$ auf den roten Würfel und $(1-a)\cdot 1$ auf den blauen Würfel, dann beschreibt die Zufallsvariable $Y=a\cdot X_1+(1-a)\cdot X_2$ den Gesamtgewinn des Spiels.

Die Analogie zum Finanzmarkt ist nun offensichtlich. Die Würfel repräsentieren die Aktien und der Gewinnauszahlungsfaktor steht für die Rendite. Die Zufallsvariable Y steht für den Wert eines Portfolios. Gemäß der obigen Aufgabenstellung betrachten wir zwei Aktien mit der gleichen zu erwartenden Monatsrendite von 4% und dem gleichen zu erwartenden Risiko von 7%. Wir überlegen, wie wir unser für Investitionen zur Verfügung stehendes Vermögen (von 1 Euro) auf beide Aktien aufteilen sollen. So ergibt sich für $E(Y)=4\%$ (unabhängig von der Aufteilung) und für $V(Y)=0,0098a^2-0,0098a+0,0049$. Die Varianz ist am kleinsten, wenn das Vermögen auf beide Aktien gleich aufgeteilt wird, also $a=\frac{1}{2}$.

6. Schlussbemerkungen

Finanzbildung ist wichtig, denn finanzielle Fehlentscheidungen können weitreichende Folgen haben. Das geht sogar so weit, dass sie das ganze Leben beeinflussen können. In Österreich gibt es kein eigenes Fach, das Finanzbildung vermittelt. Aus diesem Grund liegt es in der Verantwortung der bestehenden Fächer, hier entsprechende Inhalte zu vermitteln. Ein wichtiges Fach dabei ist Mathematik. Zu Beginn des Beitrages haben wir gesehen, dass mathematische Fähig- und Fertigkeiten essentiell für eine Finanzbildung sind. Bezüge zur Finanzmathematik lassen sich im Mathematikunterricht immer wieder einbauen.

Mögliche Themen für einen Einsatz im Mathematikunterricht reichen von der Primarstufe bis hin zum Ende der Sekundarstufe. Schon sehr früh kann man das Schätzen eines Einkaufs üben, indem Preise einzelner Produkte geschätzt werden (Wie viel kosten 3l Milch?). Das eigenständige Sammeln von Stützpunkten kann so gefördert werden. Es findet eine Verknüpfung von Gegenstand, Gewicht und Kosten statt. In Sekundarstufe I lässt sich das Durchrechnen eines Handyvertrages durchführen, sowie Berechnungen bei Kontoüberziehungen. Überwiegend werden Zinsen von Sparguthaben berechnet, es sollten auch Sollzinsen berechnet werden (vgl. DORNER, 2018a, S. 4). Finanzmathematische Anwendungen sollten im Mathematikunterricht bereits bzw. spätestens in der Sekundarstufe I vorkommen, da man bei einer ausschließlich späteren Behandlung einige gar nicht mehr erreicht. In der Sekundarstufe II lassen sich die angeführten Vorschläge mit den Lernenden bearbeiten. Des Weiteren kann noch die Zufälligkeit eines Aktienkurses bei der Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung diskutiert werden oder ob Aktienkurse als normalverteilt angesehen werden können. Das sind bei weitem noch nicht alle Möglichkeiten. In diesem Beitrag wurden exemplarisch zwei Unterrichtssequenzen aus der Fachdisziplin Finanzmathematik vorgestellt.

Abschließend lässt sich sagen: Mathematische Fähig- und Fertigkeiten sind für einen weitblickenden Umgang mit Geld unerlässlich.

Literatur

Bachelier, L. (1900): *Théorie de la spéculation.* Dissertation, Université Paris Sorbonne.

Black, F. und Scholes, M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: *The Journal of Political Economy*, Vol. 8, No. 3, S. 637-654.

Blum, W. (1978): Einkommensteuern als Thema des Analysisunterrichts in der beruflichen Oberstufe. 30(11), In: *Die berufsbildende Schule, Zeitschrift des Berufsverbandes der Lehrer an beruflichen Schulen*, S. 642-651.

Bruner, J. (1960): *The process of education*. Cambridge(Mass.): Harvard University Press.

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF) (2015): *Grundsatzerlass Wirtschafts- und Verbraucher/innenbildung*. Wien. Online: `https://bildung.bmbwf.gv.at/ministerium/rs/2015_15.html`

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF) (2016): *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen – gültig für alle Schüler/innen, die ab dem Haupttermin 2018 maturieren (Stand: Oktober 2015).* Wien. Online: `https://www.srdp.at/downloads/dl/konzept-ab-maturatermin-2018-die-standardisierte-schriftliche-\-reifepruefung-in-mathematik/`

Daume, P. (2009): *Finanzmathematik im Unterricht*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Dorner, C. (2017): *Schulrelevante Aspekte der Finanzmathematik*. Dissertation, Universität Wien.

Dorner, C. (2018a): Handy, Auto, Wohnung „habe“ ich – Schulden auch. In: *R&E-Source*, 11. Online: `https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/564`

Dorner, C. (2018b): Würfeln am Finanzmarkt. In: *Stochastik in der Schule*, 38(2), S. 24-32 .

Fuhrmann, B. (2016): Finanzbildung in Österreich – Ergebnisse der OECD - Measuring Financial Literacy - Studie und Desiderata. In: *wissenplus*, 3, S. 15-19.

Hudson, M. (2000): How interest rates were set. In: *Journal of the Economic and Social History of the Orient*, Vol. 43, S. 132-161.

Jablonka, E. (1999): Was sind „gute“ Anwendungsbeispiele? Aus: J., Maaß und W., Schlöglmann (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, Hildesheim: Franzbecker, S. 65-74.

Lehrplan der AHS. In: BGBl. II Nr. 71/2018.

Lusardi, A. und Mitchell, O. S. (2014): The Economic Importance of Financial Literacy: Theory and Evidence. In: *Journal of Economic Literature*, 52(1), S. 5-44.

Markowitz, H. (1952): Portfolio Selection. In: *The Journal of Finance*, 7(1), S. 77-91.

OECD (2017): *PISA 2015 Results (Volume IV): Student's Financial Literacy*. OECD Publishing: Paris.

Schachermayer, W. (2001): Die Rolle der Mathematik auf den Finanzmärkten. Aus: M., Aigner und E., Behrends (Hrsg.), *Die Urania Vorträge auf dem Weltkongress für Mathematik*, Berlin.

Schreiber, A. (1979): Universelle Ideen im mathematischen Denken – ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik. In: *mathematica didactica*, 2, S. 165-171.

Schwill, A. (1993): Fundamentale Ideen der Informatik. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, (25) 1, S. 20-31.

Silgoner, M. und Weber, R. (2015): Das Finanzwissen der Österreichischen Haushalte. In: *Statistiken – Daten & Analysen*, Q3/15, S. 40-48.

Winter, H. W. (2016): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblick in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. (3. Au.), Wiesbaden: Springer.

Anschrift des Verfassers

Christian Dorner

Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens Universität Graz
Heinrichstraße 36
A – 8010 Graz
Österreich
`christian.dorner@uni-graz.at`